

Санкт-Петербургский государственный университет

МАЛЫШЕВА Светлана Владимировна

Выпускная квалификационная работа

Предельная форма для случайных разбиений с ограничениями

Уровень образования: Специалитет

Направление 01.05.01 “Фундаментальные математика и механика”
Образовательная программа СМ.5007. “Фундаментальные математика и
механика”

Профиль: Теория вероятностей

Научный руководитель: Якубович Юрий
Владимирович, канд. ф.м. наук

Рецензент: Леонид Викторович Богачев,
канд. ф.м. наук, Leeds University, UK,
доцент

Saint Petersburg State University

MALYSHEVA Svetlana

Qualification Research Paper

Limit shape for random partitions with restrictions

Education level: Specialist degree

Specialty 01.05.01 “Fundamental Mathematics and Mechanics“

Educational program CM.5007. “Fundamental Mathematics and Mechanics“

Department: Probability theory

Advisor: Yakubovich Yuri, PhD

Reviewer: Leonid Bogachev, PhD, Leeds
University, UK, Reader

Saint Petersburg
2019

1. ВВЕДЕНИЕ

Со времён Эйлера разбиения чисел на натуральные слагаемые занимают умы математиков различных областей. Так, например, неприводимые представления S_n параметризуются разбиениями числа n . Более того, они находят своё применение в естественных науках. В частности, язык, включающий диаграммы Юнга, диаграммы и их функции формы, может использоваться для описания таких явлений, как конденсация Бозе-Эйнштейна, полимеризация и молекулярная сборка, и случайные разбиения в процессах коагуляции-фрагментации.

В 1977 году Вершик и Керов в СССР и Логан и Шепп в США независимо нашли экстремаль интеграла крюков, и, соответственно, предельную форму диаграмм Юнга по мере Планшереля.

В 2006 году Иванов нашёл центральную предельную теорему для распределения скалярного произведения сдвинутых диаграмм Юнга по сдвинутой мере Планшереля и некоторых многочленов четной степени. Отсюда можно сделать предположение о предельной форме сдвинутых диаграмм Юнга. В 2007 году Берштейн, Хенке и Регев сделали предположение о предельной форме сдвинутых диаграмм Юнга.

Здесь будет найдена предельная форма сдвинутых диаграмм Юнга по мере Планшереля (теорема 7). При этом мы действуем способом, близким к методу Вершика и Керова. Во втором разделе мы более подробно опишем меры Планшереля, как классическую, на обычных диаграммах Юнга, так и строгую (сдвинутую) на сдвинутых диаграммах Юнга строгих разбиений. Затем, в третьем разделе, описана предельная форма диаграмм Юнга и найдена предельная форма диаграмм Юнга. В четвертом разделе будут описаны интересные результаты для планшерелевской меры, полученные другими авторами. В пятом разделе будут приведены другие примеры предельных форм.

2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПО ПЛАНШЕРЕЛЕВСКОЙ МЕРЕ

Разбиением натурального числа N называется его разложение в сумму невозрастающих слагаемых:

$$N = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_r$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0.$$

Количество слагаемых r называется длиной разбиения, и мы обозначим его как $l(\lambda)$.

Для данного n число разбиений $p(n)$ конечно, но возрастает вместе с n : по теореме Харди–Рамануджана [2]

$$p(n) \sim Cn^{-1} \exp 2\pi\sqrt{n/6}. \quad (1)$$

Разбиение называется строгим, если все его слагаемые попарно различны:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{l(\lambda)}.$$

Здесь есть аналогичный результат [2]: число строгих разбиений $sp(n)$ возрастает как

$$sp(n) \sim Cn^{-3/4} \exp(\pi\sqrt{n/3}). \quad (2)$$

Диаграммой Юнга называется множество клеток (то есть единичных квадратов с вершинами в целых точках) в первом квадранте, содержащее вместе с каждой клеткой с координатами (X, Y) (под координатами клетки подразумеваются координаты её правого верхнего угла) все клетки с координатами (X', Y') , где $X' \leq X, Y' \leq Y$ (см. рис. 1). Диаграммы Юнга находятся во взаимно-

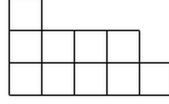


Рис. 1. Диаграмма Юнга разбиения $10 = 3 + 2 + 2 + 2 + 1$

однозначном соответствии с разбиениями, и могут быть рассмотрены как их геометрическое представление. Пусть высотой i -го столбца будет λ_i .

Строгому разбиению λ можно сопоставить сдвинутую диаграмму Юнга $S(\lambda)$, которая получается, если в i -ом столбце закрашивать клетки с $i + 1$ по $\lambda_i + i$ (см. рис. 2).

Стандартной таблицей Юнга называется нумерация клеток диаграммы λ размера n числами $1, \dots, n$ так, что номера клеток возрастают слева направо и снизу вверх. Пусть f_λ число стандартных таблиц Юнга формы λ .

Количество стандартных таблиц Юнга формы λ легко посчитать по хорошо известной формуле крюков [12]:

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} \text{hook}(\square)}, \quad (3)$$

где $\text{hook}(\square)$ означает количество клеток строго сверху и строго справа от данной клетки \square , считая её саму. Так же, есть хорошо известная формула Юнга–Фробениуса [12]:

$$f_\lambda = \frac{n!}{l_1! \dots l_r!} \prod_{i < j} (l_i - l_j), \quad (4)$$

где $l_i = \lambda_i + l(\lambda) - i$.

Мера Планшереля $Pl_n(\lambda)$ диаграммы Юнга размера n определяется как

$$Pl_n(\lambda) = \frac{f_\lambda^2}{n!}. \quad (5)$$

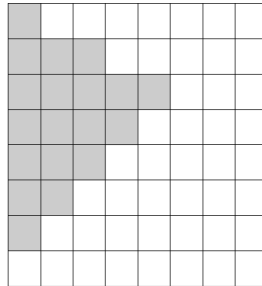
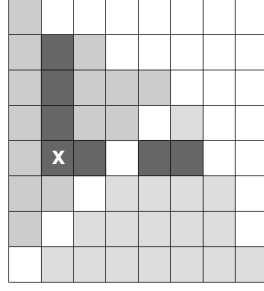


Рис. 2. Сдвинутая диаграмма Юнга строгого разбиения $19 = 7 + 5 + 4 + 2 + 1$

Рис. 3. $hook'(\square)$

Теорема 1. Мера Планшереля является вероятностной мерой на P_n — множестве диаграмм Юнга размера n .

С помощью соответствия Робинсона–Шенстеда–Кнута [3] можно построить биекцию между перестановками чисел $1, \dots, n$ и парами таблиц Юнга размера n одинаковой формы.

Стандартной сдвинутой таблицей Юнга формы $\lambda \in SP_n$ называется нумерация клеток $S(\lambda)$ числами $1, \dots, n$ так, что они возрастают слева направо и снизу вверх. Обозначим g_λ число стандартных сдвинутых таблиц Юнга формы λ . Для сдвинутых таблиц Юнга имеется аналог формулы Юнга–Фробениуса [9]:

$$g_\lambda = \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_r!} \prod_{i < j} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)}{(\lambda_i + \lambda_j)}. \quad (6)$$

Так же имеется формула крюков для сдвинутых диаграмм Юнга [1]:

$$g_\lambda = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} hook'(\square)}, \quad (7)$$

где $hook'(\square)$ означает число клеток строго выше данной, либо строго правее данной, включая её саму в объединении данной диаграммы с её образом при симметрии относительно прямой $y = x$. Сдвинутая (или строгая) мера Планшереля $SPl_n(\lambda)$ определяется, как

$$SPl(\lambda) = \frac{g_\lambda^2}{n!} 2^{n-l(\lambda)}. \quad (8)$$

Теорема 2. [9] Сдвинутая мера Планшереля также является вероятностной мерой на множестве SP_n .

Доказательство. Будем записывать $\lambda'' \searrow \lambda'$, если λ'' получается из λ' добавлением одной клетки. Зададим марковскую цепь на всех сдвинутых диаграммах Юнга со следующими переходными вероятностями:

$$p(\lambda', \lambda'') = \frac{g_{\lambda''}}{g_{\lambda'}(n+1)} 2^{\delta(l(\lambda'), l(\lambda''))}, \quad \lambda' \in SP_n, \quad \lambda'' \searrow \lambda'. \quad (9)$$

Тогда, так как путей из \emptyset в λ всего g_λ , а вероятность каждого пути равняется $\frac{g_\lambda}{n!} 2^{n-l}$, то $SPl(\lambda)$ — это вероятность прийти в λ на n -м шаге, стартовав на нулевом шаге из пустой диаграммы \emptyset .

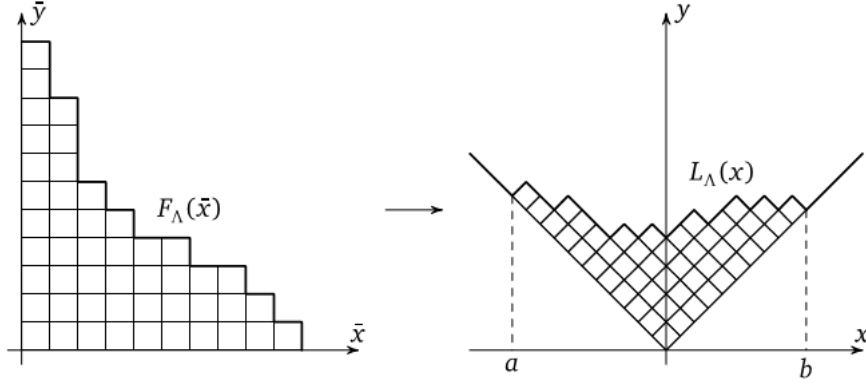


Рис. 4. Перевод диаграммы Юнга в керовские координаты

Остаётся показать, что $\sum p(\lambda', \bullet) = 1$. Заметим, что из формулы Юнга–Фробениуса (6) следует, что

$$\sum p(\lambda', \bullet) = \sum_{i=1}^r \frac{2}{\lambda_i + 1} \cdot \prod_{k \neq i} \frac{(\lambda_i - \lambda_k + 1)(\lambda_i + \lambda_k)}{(\lambda_i + \lambda_k + 1)(\lambda_i - \lambda_k)} + \prod_{i=1}^r \frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1}. \quad (10)$$

Нужное нам равенство получится, если подсчитать вычет функции

$$f_2(z) = \frac{2z - 1}{z(z - 1)} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{(z + \lambda_i - 1)(z - \lambda_i)}{(z - \lambda_i - 1)(z + \lambda_i)} \quad (11)$$

в точке ∞ двумя разными способами: разложение на простейшие дроби и разложение в ряд Лорана. \square

Для сдвинутых диаграмм Юнга также существует аналог алгоритма Робинсона–Шенстеда–Кнута [8].

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПО МЕРЕ ПЛАНШЕРЕЛЯ ОБЫЧНЫХ И СТРОГИХ ДИАГРАММ ЮНГА

Назовем отнормированной диаграммой Юнга Λ^* фигуру, получающуюся из диаграммы Λ сжатием в \sqrt{n} раз, с центром гомотетии в точке $(0, 0)$, где $n = |\Lambda|$. Площадь отнормированной диаграммы Юнга равна 1. Рассмотрим отнормированную диаграмму в керовских координатах, то есть повернутую на 45° и сжатую в $\sqrt{2}$ раз (см. рис. 4) как график функции, и продолжим эту функцию на всё \mathbb{R} с помощью бывших координатных осей.

Назовём крюком данной фигуры в точке (x, y) сумму длин пересечений данной фигуры с лучами $[Y = y; X \in (x, +\infty)]$ и $[X = x; Y \in (y, +\infty)]$. Интегралом крюков диаграммы Юнга Λ назовём

$$\theta_\Lambda = 1 + \iint_{\Lambda^*} \ln \text{hook}(x, y) dx dy, \quad (12)$$

где $\text{hook}(x, y)$ — длина крюка в точке (x, y) в диаграмме Λ^* .

Определим интеграл крюков функции $L(x)$, дифференцируемой почти везде.

$$\theta_L = 1 + 2 \int \int_{t < s} \ln 2(s - t)(1 - L'(s))(1 + L'(t)) ds dt. \quad (13)$$

Если $L(x)$ — график Λ^* в керовских координатах, то $\theta_L = \theta_\Lambda$.

Рассмотрим множество всех функций, удовлетворяющих данным трём условиям:

- (1) $L(x) = |x|$ при всех x , кроме лежащих в некотором отрезке;
- (2) $\int_{-\infty}^{\infty} (L(x) - |x|) = 1/2$;
- (3) $L(x) \geq |x|$ для всех x .

Заметим, что график Λ^* в керовских координатах им удовлетворяет для любой диаграммы Λ .

Пусть θ_Ω будет минимумом интеграла крюков на этом множестве. В 1977 году Вершик и Керов [11] в СССР независимо с Логаном и Шеппом [5] в США нашли функцию, минимизирующую интеграл крюков.

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) & |x| < 1, \\ |x| & |x| \geq 1. \end{cases} \quad (14)$$

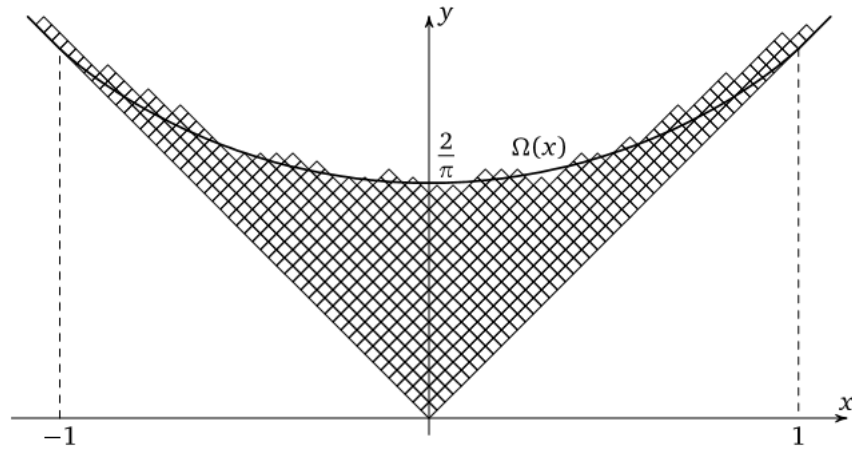


Рис. 5. Предельная форма диаграмм Юнга $\Omega(x)$

В обычных координатах предельную форму можно записать параметрически:

$$\begin{cases} x = \left(\frac{2}{\pi}\right)(\sin \Theta - \Theta \cos \Theta) + 2 \cos \Theta, & 0 \leq \Theta \leq \pi \\ y = \left(\frac{2}{\pi}\right)(\sin \Theta - \Theta \cos \Theta) & 0 \leq \Theta \leq \pi. \end{cases} \quad (15)$$

Предельная форма диаграмм Юнга совпадает с $\Omega(x)$, а $\theta_\Omega = 0$.

Диаграмма Юнга Λ называется A -существенной, если её интеграл крюков

$$\theta \leq \frac{A}{\sqrt{n}}. \quad (16)$$

Теорема 3 (Вершик, Керов). Пусть $A \geq \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$. Тогда при n стремящемся к ∞ мера Планшереля существенных диаграмм стремится к 1.

Теорема 4 (Вершик, Керов). Если диаграмма Юнга Λ A -существенная, то её график в керовских координатах $L_\Lambda(x)$ такой, что

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |L_\Lambda(x) - \Omega(x)| < Cn^{-1/6}, \quad (17)$$

где C — константа, независимая от n и Λ .

Доказательство. Пусть $f(X) = L(X) - \Omega(X)$. Тогда

$$\theta_L = - \iint \ln 2 |s - t| f'(s) f'(t) ds dt + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arch} |s| ds \quad (18)$$

Носитель f ограничен. Интеграл крюков можно переписать, как

$$\theta(\Omega + f) = \frac{1}{2} \|f\|_\theta^2 + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arch} |s| ds, \quad (19)$$

где

$$\|f_\Lambda\|_\theta^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt + 8a \int_{-a}^a \frac{f^2(s) ds}{a^2 - s^2}, \quad (20)$$

если носитель f находится в отрезке $[-a; a]$.

Лемма 1. Для некоторого $a > 1$ выполнено, что график любой отнормированной существенной диаграммы в керовских координатах не отличается от $|x|$ вне отрезка $[-a; a]$.

Предположим, что график отнормированной диаграммы Юнга отличается от $|x|$ в точке $a + 1$. Заметим, что $f(x) > \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $a > x > 1$, так как отклоняется хотя бы на одну клетку, а $\Omega(x) = |x|$ вне отрезка $[-1, 1]$.

$$\theta_\Lambda \geq \int_{|x|>1} f(x) \operatorname{arch} |x| dx \geq \int_1^a \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arch}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(-\sqrt{a^2 - 1} + a \cdot \operatorname{arch}(a) \right) \quad (21)$$

Заметим, что выражение $(-\sqrt{a^2 - 1} + a \cdot \operatorname{arch}(a))$ может быть сколь угодно велико при достаточно больших a , так как больше, чем $(\operatorname{arch} a - 1)$.

Тогда при достаточно большом a такая диаграмма не может быть существенной. Аналогичные рассуждения применимы и к отрицательной полуоси.

Заметим, что

$$\int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arch} |s| ds \geq 0, \quad (22)$$

так как $L(x) \geq |x|$ и $\Omega(x) = |x|$ вне отрезка $[-1; 1]$. Из существенности диаграммы Юнга

$$\left\| \frac{f_\Lambda(s)}{\sqrt{a^2 - s^2}} \right\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{4a} \cdot \frac{A}{\sqrt{n}}. \quad (23)$$

Так как $\sqrt{a^2 - s^2} < a$,

$$\|f_\Lambda(s)\|_{L_2}^2 \leq \frac{Aa}{4\sqrt{n}}. \quad (24)$$

Так как $|f'_\Lambda(s)| \leq 2$,

$$\|f_\Lambda\|_{L_\infty}^3 \leq 6 \cdot \|f_\Lambda\|_{L_2}^2 \leq \frac{3Aa}{\sqrt{n}} \quad (25)$$

Извлекая кубический корень из этого выражения, получим, что

$$\|f_\Lambda\|_{L_\infty} \leq C \cdot n^{-1/6}. \quad (26)$$

Таким образом, график A -существенной отнормированной диаграммы Юнга не может отличаться от $\Omega(x)$ больше, чем на $\frac{C}{n^{1/6}}$.

□

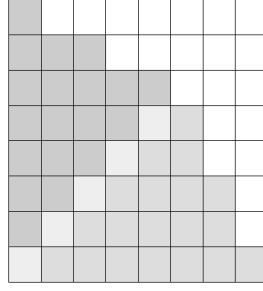


Рис. 6. Диаграмма Λ , являющаяся "удвоением"

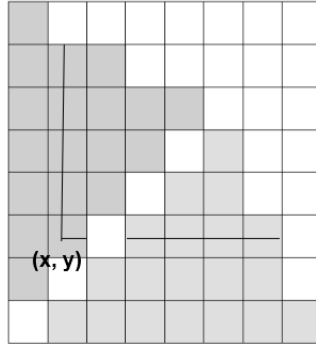


Рис. 7. Сумма длин проведённых отрезков равна $hook'(x, y)$

Назовём "удвоением" Λ сдвинутой диаграммы Юнга λ диаграмму Юнга, получающуюся при объединении клеток λ , её образа при симметрии относительно прямой $y = x$ и диагональных клеток с координатами (i, i) , где $i < l(\lambda)$. Заметим, что для сдвинутой диаграммы Юнга $l(\lambda) \leq \sqrt{2n+1} = O(\sqrt{n})$.

Теорема 5. $\ln Spl(\lambda) \leq -(2n+l)\frac{1}{2}\theta_\Lambda + O(\sqrt{n})$, где $l = l(\lambda)$, диаграмма Юнга Λ является "удвоением" λ , а диаграмма Λ^* — отнормированной диаграммой Λ .

Доказательство. Из формул (8) и (6) мы можем получить, что

$$Spl(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{\square \in \Lambda} hook'^2(\square)} 2^{n-l}. \quad (27)$$

Поэтому

$$\ln Spl(\lambda) = \ln n! + (n-l) \ln 2 - 2 \sum_{\square \in \Lambda} \ln hook'(\square), \quad (28)$$

где

$$\ln hook'(\square) = \iint_{\square} \ln hook'(x, y) dx dy + \frac{1}{2} c(hook'(\square)), \quad (29)$$

где $hook'(x, y)$ — длина крюка точки (x, y) в фигуре, получающейся объединением λ с её образом при симметрии относительно $y = x$ (рис. 7), а $c(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)x^{2k}}$. Можно заметить, что если $x \in \mathbb{N}$, то $\frac{1}{6x^2} \leq c(x) \leq \frac{1}{x^2}$. Из

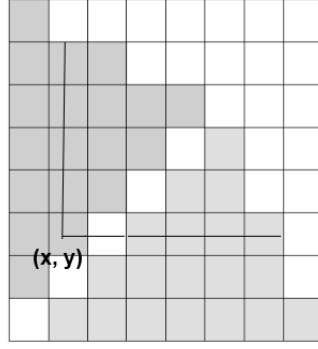


Рис. 8. Сумма длин проведенных отрезков равна $h(x, y)$

двух предыдущих формул получаем, что

$$\ln Spl(\lambda) = n \ln n - n + O(\ln n) + \ln 2(n-l) - 2 \iint_{\lambda} \ln hook'(x, y) dx dy - \sum_{\square \in \lambda} c(hook'(\square)). \quad (30)$$

В этом выражении

$$\begin{aligned} & 2 \iint_{\lambda} \ln hook'(x, y) dx dy = \\ & = \iint_{\Lambda} \ln hook(x, y) dx dy - \iint_{d(\Lambda)} \ln hook(x, y) dx dy + \iint_{D(\Lambda) \setminus d(\Lambda)} \ln \frac{hook'(x, y)}{hook(x, y)} dx dy, \end{aligned} \quad (31)$$

где $hook(x, y)$ — крюк точки (x, y) в диаграмме Λ (рис. 8), $D(\Lambda)$ это квадрат Дюрфи, а $d(\Lambda)$ — клетки, пересекающиеся с прямой $x = y$. Заметим, что для почти всех точек $D(\Lambda) \setminus d(\Lambda)$ $hook(x, y) = hook'(x, y) + 1$, а для точек вне квадрата Дюрфи $hook(x, y) = hook'(x, y)$. Если точка $(x, y) \in D(\Lambda) \setminus d(\Lambda)$ лежит в клетке с координатами (i, j) , то $1 > \frac{h'(x, y)}{h(x, y)} \geq 1 - \frac{1}{2l-i-j}$. Из этой оценки получаем, что

$$\left| \iint_{D(\Lambda) \setminus d(\Lambda)} \ln \frac{hook'(x, y)}{hook(x, y)} dx dy \right| \leq \ln \frac{(2l+1)!}{(l+1)!l!} = 2l \ln 2 + O(\ln l) = O(\sqrt{n}). \quad (32)$$

Наша задача — переписать это всё в интегралах, которые берутся по Λ^* , чтобы свести всё к интегралу крюков.

$$\begin{aligned} \iint_{\Lambda^*} \ln hook^*(x, y) dx dy &= \frac{1}{2n+l} \iint_{\Lambda} \ln \frac{hook(x, y)}{\sqrt{(2n+l)}} dx dy = \\ &= \frac{\iint_{\Lambda} \ln hook(x, y) dx dy}{2n+l} - \frac{1}{2} \ln(2n+l), \end{aligned} \quad (33)$$

где $hook^*(x, y)$ — длина крюка точки (x, y) в диаграмме Λ^* .

$$\begin{aligned} \iint_{d(\Lambda^*)} \ln hook^*(x, y) dx dy &= \frac{1}{2n+l} \iint_{d(\Lambda)} \ln \frac{hook(x, y)}{\sqrt{(2n+l)}} dx dy \\ &= \frac{\iint_{d(\Lambda)} \ln hook(x, y) dx dy}{2n+l} - \frac{l}{2(2n+l)} \ln(2n+l) \end{aligned} \quad (34)$$

$d(\Lambda^*)$ это образ $d(\Lambda)$ при сжатии. Тогда, с помощью (32), (33), (34) получаем, что

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\lambda} \ln hook'(x, y) dx dy &= \\ = \left(\iint_{\Lambda^*} \ln hook^*(x, y) dx dy - \iint_{d(\Lambda^*)} \ln hook^*(x, y) dx dy \right) (2n+l) + n \ln(2n+l) + O(\sqrt{n}); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \ln Spl(\lambda) &\leq n \ln \frac{2n}{2n+l} - n + \\ &+ O(\sqrt{n}) + (2n+l) \iint_{d(\Lambda^*)} \ln hook^*(x, y) dx dy - (2n+l) \iint_{\Lambda^*} \ln hook^*(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (36)$$

По неравенству Йенсена, применяя его сначала для каждой отдельной клеточки диагонали, оценивая интеграл через логарифм крюка её середины, а затем сумму крюков середин через неравенство Йенсена, так как сумма крюков середин клеток диагонали равна 1, получаем:

$$0 \geq \iint_{d(\Lambda^*)} \ln hook^*(x, y) dx dy. \quad (37)$$

Тогда

$$\ln Spl(\lambda) \leq -(2n+l) \frac{1}{2} \theta_{\Lambda} + O(\sqrt{n}). \quad (38)$$

□

Назовём сдвинутую диаграмму Юнга λ A -существенной, если она A -существенна при "удвоении".

Теорема 6. Для достаточно больших A мера A -существенных диаграмм сходится к 1.

Доказательство. Из предыдущей теоремы 5 можно получить, что

$$\ln Spl(\lambda) \leq -\frac{1}{2} \theta_{\Lambda} (2n+l) + C \sqrt{2n+l}. \quad (39)$$

Тогда для не A -существенных диаграмм

$$\ln Spl(\lambda) \leq (C - 0.5A) \sqrt{2n+l}. \quad (40)$$

Мера всех несущественных диаграмм из-за формулы Харди–Рамануджана не превышает

$$O(n^{-3/4} \exp(\pi \sqrt{n/3} + (C - 0.5A) \sqrt{2n+l})), \quad (41)$$

что, очевидно, стремится к 0 для достаточно большого A . □

Комбинируя два предыдущих результата, получаем основное утверждение данной работы:

Теорема 7. *Рассмотрим случайную сдвинутую диаграмму Юнга λ размера n на вероятностном пространстве, порождённом строгой планшерелевской мерой. Тогда, при $n \rightarrow \infty$, вероятность того, график "удвоенной" отнормированной диаграммы отличается от предельной формы диаграмм Юнга $\Omega(x)$ больше, чем на $\frac{C}{\sqrt{n}}$, стремится к 0 для некоторого C .*

4. ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О СТРОГОЙ ПЛАНШЕРЕЛЕВСКОЙ МЕРЕ

Для полноты картины, опишем также некоторые результаты о мере Планшереля на сдвинутых диаграммах, полученные другими авторами.

4.1. Некоторые полиномиальные свойства строгой планшерелевской меры. Полиномиальные теоремы имеют широкое применение в задачах, связанных с диаграммами Юнга. В частности, они часто используются для поиска предельных форм. Поэтому в данном разделе мы рассмотрим свойства, связанные со строгой планшерелевской мерой. Назовём сдвинутым Планшерелевским средним

$$\mathbb{E}_n[\varphi] = \sum_{\lambda \in SP_n} \mathbb{P}_n(\lambda) \varphi(\lambda) = \sum_{\lambda \in SP_n} \frac{2^{n-\ell(\lambda)} (g^\lambda)^2}{n!} \varphi(\lambda). \quad (42)$$

Не умаляя общности, будем полагать, что разбиение числа n — это бесконечная последовательность с нулями на конце. Назовём функцию от элемента ℓ_0 — пространства всех финитных последовательностей — суперсимметрической, если она принадлежит алгебре, порождённой многочленами

$$p_{2m+1} = x_1^{2m+1} + x_2^{2m+1} + \dots, \quad (43)$$

при всех $m = 0, 1, 2, \dots$, и симметрической, если она лежит в алгебре, порождённой многочленами

$$p_m = x_1^m + x_2^m + \dots \quad (44)$$

при $m = 1, 2, \dots$. В работе [6] доказан следующий результат.

Теорема 8. *Для любой суперсимметрической функции f*

$$\mathbb{E}_n[f] = \sum_{\lambda \in SP_n} \frac{2^{n-\ell(\lambda)} (g^\lambda)^2}{n!} f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}) \quad (45)$$

является полиномом от n .

Лемма 2. [6] *Обозначим $c_\square = j - i$ для клетки \square из сдвинутой диаграммы Юнга λ с координатами (i, j) . Тогда*

$$p_{2m+1}(\lambda) = \sum_{\square \in S(\lambda)} \{(c_\square + 1)^{2m+1} - c_\square^{2m+1}\}. \quad (46)$$

Обозначим

$$\widehat{c}_\square = \frac{1}{2} c_\square (c_\square + 1). \quad (47)$$

Теорема 9. [6] *Для любой симметрической функции F существует единственная суперсимметрическая функция \widehat{F} , что для всех сдвинутых диаграмм Юнга выполнено*

$$\widehat{F}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}) = F(\widehat{c}_\square : \square \in S(\lambda)). \quad (48)$$

4.2. Центральная предельная теорема для сдвинутых диаграмм Юнга. Следующая теорема была доказана Ивановым [4]. Рассмотрим строгую диаграмму λ в керовских координатах Пусть

$$\Delta_\lambda(x) = \frac{1}{2}(\lambda(\sqrt{2|\lambda|x}) - \sqrt{2|\lambda|\Omega(x)}), \quad x \geq 0. \quad (49)$$

Выбирая λ в соответствии со строгой Планшерелевской мерой SPl , можно рассмотреть случайную непрерывную функцию $\Delta^{(n)}$. Её носитель будет ограничен.

Тогда можно рассматривать её скалярное произведение с любым многочленом. Рассмотрим многочлены Чебышева

$$u_k(x) = U_k(x/2) = \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j \binom{k-j}{j} x^{k-2j}. \quad (50)$$

Они ортогональны с весом $\frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}$:

$$\int_{-2}^2 u_k(x) u_l(x) \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} dx = \delta_{k,l}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (51)$$

Теорема 10. Пусть

$$u_{2k}^{(n)} = \int_0^\infty u_{2k}(x) \Delta^{(n)}(dx), \quad k = 1, 2, \dots \quad (52)$$

Тогда если ξ_1, ξ_2, \dots — система независимых стандартных нормальных случайных величин, то

$$\left\{ u_{2k}^{(n)} \right\}_{k \geq 1} \xrightarrow{d} \left\{ \frac{\xi_k}{\sqrt{2(2k+1)}} \right\}_{k \geq 1}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (53)$$

5. ДРУГИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДИАГРАММ ЮНГА

- (1) Для равномерного распределения на диаграммах Юнга размера n при сжатии в \sqrt{n} раз предельная форма имеет вид [10]

$$e^{-(\pi/\sqrt{6})x} + e^{-(\pi/\sqrt{6})y} = 1, \quad (54)$$

или

$$F(t) = -(\sqrt{6}/\pi) \ln \left(1 - e^{(\pi/\sqrt{6})t} \right). \quad (55)$$

- (2) Для равномерного распределения на диаграммах Юнга с неравными членами при сжатии в \sqrt{n} предельная форма имеет вид [10]

$$e^{(\pi/\sqrt{12})y} - e^{-(\pi/\sqrt{12})x} = 1, \quad (56)$$

или

$$G(t) = (\sqrt{12}/\pi) \ln \left(1 + e^{-(\pi/\sqrt{12})t} \right). \quad (57)$$

Заметим, что если аналогично предыдущим рассуждениям "удвоить" сдвинутую диаграмму Юнга и рассмотреть равномерную меру на "удвоенных" диаграммах, то предельная форма таких диаграмм будет совпадать с предельной формой обычных диаграмм. То есть, предельная форма симметричных диаграмм Юнга по равномерной мере совпадает с предельной формой обыкновенных диаграмм Юнга по равномерной мере.

- (3) Рассмотрим распределение Хаара: сначала рассмотрим равномерное распределение на множестве всех перестановок S_n , потом отображим перестановку в разбиение числа n , соответствующее длинам её циклов. Части полученного разбиения разделим на n . Тогда в пределе получится распределение Пуассона-Дирихле.[7]
- (4) Рассмотрим равномерное распределение на разбиениях числа n , таких, что соответствующая диаграмма Юнга лежит в прямоугольнике $\rho\sqrt{n} \times \theta\sqrt{n}$, $\rho\theta \geq 1$. Тогда предельная форма при сжатии в \sqrt{n} раз имеет вид [10]

$$\frac{1 - e^{c\theta}}{1 - e^{-c(\theta+\rho)}} e^{-cy} + \frac{1 - e^{-c\rho}}{1 - e^{-c(\theta+\rho)}} e^{-cx} = 1. \quad (58)$$

При $\rho = \theta$ эта формула имеет вид

$$e^{-cy} + e^{-cx} = 1 - e^{-c\theta}, \quad (59)$$

где константа C ищется из условия $\int_0^\infty y dx = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jason Bandlow. An elementary proof of the hook formula. 2007.
- [2] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. 2009.
- [3] William Fulton. *Young Tableaux With Application to Representation Theory and Geometry*.
- [4] Vladimir Ivanov. Plancherel measure on shifted Young diagrams. 2006.
- [5] B.F Logan and L. Shepp. A variational problem for random Young tableaux. *Advances in Mathematics*, 26:206–222, 11 1977.
- [6] Sho Matsumoto. Polynomiality of shifted plancherel averages and content evaluations. 2015.
- [7] Jim Pitman. *Combinatorial Stochastic Processes*. 2006.
- [8] Dale Raymond Worley. *A theory of Shifted Young Tableaux*. Massachusetts Institute of Technology, Department of Mathematics, 1984.
- [9] А. М. Бородин. Мультипликативные центральные меры на графе Шура. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 240:44–52, 1997.
- [10] А. М. Вершик. Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации. *Функц. анализ и его прил.*, 30(2):19–39, 1996.
- [11] А.М. Вершик and С.В. Керов. Асимптотика меры планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга. *Доклады Академии наук СССР*, 277(6), 1997.
- [12] Буфетов А.И. и др. *Диаграммы Юнга и их предельная форма*.